Ellipsoïde de John-Loewner

Lemme 1. *Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ symétriques définies positives, et $\alpha, \beta \geqslant 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$, alors :*

$$\det(\alpha A + \beta B) > \det(A)^\alpha \det(B)^\beta$$

Démonstration.

On utilise le théorème de pseudo-réduction simultanée :
Il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$, avec $D = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors :

$$(\det A)^\alpha (\det B)^\beta = (\det P^2)^\alpha (\det P^2 \det D)^\beta = \det P^2 (\det D)^\beta$$

$$\det(\alpha A + \beta B) = \det({}^tP(\alpha I_n + \beta D)P) = \det P^2 \det(\alpha I_n + \beta D)$$

On est donc ramenés à montrer que $\det(\alpha I_n + \beta D) > (\det D)^\beta$. Par la stricte concavité du logarithme, on a :

$$\ln(\alpha + \beta\lambda_i) > \alpha \ln 1 + \beta \ln \lambda_i = \beta \ln \lambda_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n \ln(\alpha + \beta\lambda_i) > \beta \sum_{i=1}^n \ln \lambda_i$$

En prenant l'exponentielle, on obtient :

$$\prod_{i=1}^n (\alpha + \beta\lambda_i) > \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^\beta \Leftrightarrow \det(\alpha I_n + \beta D) > (\det D)^\beta$$

□

Théorème 2. *Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$, alors il existe un unique ellipsoïde de centre 0 et de volume minimal contenant K.*

Démonstration.

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle.
Un ellipsoïde plein centré en 0 de $\mathbb{R}^n$ a une équation du type $q(x) \leqslant 1$, où $q \in Q^{++}$.
On note $\mathcal{E}_q = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, q(x) \leqslant 1\}$. Il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle q s'écrit $q(x) = \sum\limits_{i=1}^n a_i x_i^2$.

On note V_q le volume de $\mathcal{E}_q$, alors :

$$V_q = \int\int \cdots \int_{q(x) \leqslant 1} dx_1 \cdot dx_n$$

On effectue le changement de variable $x_i = \frac{t_i}{\sqrt{a_i}}$ de jacobien $\frac{1}{\sqrt{a_1 \ldots a_n}}$.
En notant $D(q) = a_1 \ldots a_n$, qui est aussi le déterminant de la matrice de q, on obtient alors :

$$V_q = \int\int \cdots \int_{\|x\| \leqslant 1} \frac{dx_1 \ldots dx_n}{\sqrt{D(q)}} = \frac{V_0}{\sqrt{D(q)}}$$

où V_0 est le volume de la boule unité pour la norme euclidienne canonique.

Le problème se reformule alors comme un problème d'optimisation avec contrainte.
On cherche q qui maximise $D(q)$ et tel que $q(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in K$.
On munit Q de la norme $N(q) = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |q(x)|$, et on considère l'ensemble $\mathcal{A} = \{q \in Q^+ \mid \forall x \in K, q(x) \leqslant 1\}$.
Montrons que $\mathcal{A}$ est un compact convexe non vide de Q.

Soit q et q' dans $\mathcal{A}$, et soit $\lambda \in [0,1]$.

$$q_\lambda = \lambda q + (1-\lambda) q'$$

Alors on a bien $q_\lambda(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et $q_\lambda(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in K$. Donc $\mathcal{A}$ est convexe.

Soit $(q_n)_n$ une suite de $\mathcal{A}$ convergente dans Q vers q. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $|q(x) - q_n(x)| \leqslant N(q - q_n) \|x\|$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n(x) = q(x)$. On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, q(x) = \lim_{n \to +\infty} q_n(x) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in K, q(x) = \lim_{n \to +\infty} q_n(x) \leqslant 1$$

Donc $q \in \mathcal{A}$, et $\mathcal{A}$ est fermé.

Soient a dans l'intérieur de K et $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset K$.
Si $\|x\| \leqslant r$, alors $a + x \in K$. Par l'inégalité de Minkowski, on obtient :

$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{q(x + a - a)} \leqslant \sqrt{q(x+a)} + \sqrt{q(-a)} \leqslant 2$$

Donc $q(x) \leqslant 4$. Si $\|x\| \leqslant 1$, $|q(x)| = q(x) = \frac{q(rx)}{r^2} \leqslant \frac{4}{r^2}$, ainsi $N(q) \leqslant \frac{4}{r^2}$, et $\mathcal{A}$ est borné.

K étant borné, il existe $M > 0$ tel que pour tout x dans K, $\|x\| \leqslant M$.
Donc $x \mapsto \frac{\|x\|^2}{M^2}$ est dans $\mathcal{A}$, qui est non vide.

Comme det est continue, D est continue sur $\mathcal{A}$. On en déduit que D atteint sont maximum sur $\mathcal{A}$ en q_0. De plus, comme $x \mapsto \frac{\|x\|^2}{M^2}$ est dans $\mathcal{A}$ et est de déterminant strictement positif, on a $D(q_0) > 0$, donc q_0 est définie positive.

Nous venons de montrer l'existence d'un ellipsoïde de volume minimal qui contient K.
Montrons qu'il est unique.
Soit $q \in \mathcal{A}$, par l'absurde on suppose que $D(q) = D(q_0)$ avec $q \neq q_0$.
Soient S et S_0 les matrices de q et q_0. On remarque que $\frac{1}{2}(q + q_0) \in \mathcal{A}$.

$$D\left(\frac{1}{2}(q + q_0)\right) = \det\left(\frac{1}{2}(S + S_0)\right) > (\det S)^{\frac{1}{2}} (\det S_0)^{\frac{1}{2}} \geqslant \det S_0 = D(q_0)$$

Cela contredit la maximalité de $D(q_0)$. □

Conclusion. Il existe un unique ellipsoïde de volume minimal contenant K. ◁

Références

[FGN13c] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X-ENS Algèbre 3*. Cassini, 2013